Глава 5. Геометрия евклидовых пространств.

В лин. пр-вах нет понятий, связанных с измерениями, таких как длина и угол. Эти понятия связаны со скалярным произведением

§1. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника

Введем понятие векторного пр-ва над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$

Определение Вещественное линейное пр-во наз евклидовым, если в нем определена операция скаляр. умнож. Говорят, что задано скалярное произведение, если каждой паре

$$\forall x, y \in V \xrightarrow[\text{веш. числа}]{\text{сопост}} (x,y) \in \mathbb{R}$$

и выполняются следующие свойства

1) билинейность (= лин. по каждому аргументу)

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2; y)$$

$$(x; \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x, y_1) + \beta(x, y_2)$$

2) симметричность $(x,y) = (y,x)$

3) положительная определенность

$$\forall x \in V \quad (x,x) \geq 0 \quad \text{причем} \quad (x,x) = 0 \iff x = 0$$

Скалярное произведение - положит. определенная форма

примеры евклидовых пространств

1. Арифметическое пр-во $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1 \ldots x_n) \; ; \; y = (y_1 \ldots y_n)$$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. $C[0,1]$ - пр-во непрерывных функций на $[0,1]$

$$(f,g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

Определение Комплексное евклидово пр-во (унитарное, эрмитово) это комплексное лин пр-во V с эрмитовым положительно определенным полуторалинейным скалярным произв.

$$x, y \in V \to (x, y) \in \mathbb{C}$$

1) полуторалинейность (т.е линейность по первому, антилин по второму аргументу)

$$(\alpha x_1 + \beta x_2; y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$$

$$(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2)$$

2) эрмитова симметричность $(x, y) = \overline{(y, x)}$

3) положительная определенность

$$\forall x \in V \quad (x, x) \geq 0 \quad \text{причем} \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

__примеры__

1. Арифметическое компл. пр-во $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1 \ldots z_n), \; w = (\omega_1 \ldots \omega_n)$$

$$(z, \omega) = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{\omega}_i$$

? Зачем сопряжения?

напр. $a(3,4,5)$ $(a,a) = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 0$. было бы.

2. $C[0,1]$ $f: [0,1] \to \mathbb{C}$

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} \, dt.$$

Определение Длина (или норма) вектора наз

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Лемма (неравенство К-Б)

$$\forall x, y \in V \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

равенство имеет место тогда и только тогда, когда вектора x, y коллинеарны

Док-во Если $y = 0$, то выполняется

Если $y \neq 0$

Рассмотрим вектор $z = x - \dfrac{(x, y)}{(y, y)} y$

Тогда
$$(y,z)=\left(y;\ x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y\right)=(y,x)-\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(y,y)=0$$

Рассмотрим
$$0\leqslant(z,z)=\left(x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y;\ z\right)=(x,z)=\left(x,\ x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y\right)=$$
$$=(x,x)-\left(x,\ \frac{(x,y)}{(y,y)}y\right)=(x,x)-\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(x,y)=(x,y)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$
$$\omega\cdot\overline{\omega}=|\omega|^2$$

Отсюда получаем, что
$$|(x,y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|$$
Равенство $\Leftrightarrow (z,z)=0 \Rightarrow z=x-\frac{(x,y)}{(y,y)}y=0$

т.е векторы x,y - лин. зависимы

Следствие 1 (Неравенство треугольника)

$\forall x,y,z\in V \qquad |x\pm y|\leqslant |x|+|y| \qquad (|x|=\|x\|)$

$|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|$

$(x,y)+(y,x)=$
$\omega+\overline{\omega}=2\operatorname{Re}\omega$

Док-во
$$|x\pm y|^2=(x\pm y;\ x\pm y)=|x|^2\pm 2\operatorname{Re}(x,y)+|y|^2\leqslant$$
$$\leqslant|x|^2+2|x||y|+y^2=(|x|+|y|)^2$$
2 неравенство из 1 $\quad x\to x-y;\ y\to y-z$

Определение Нормой в лин пр-ве V наз функционал
$$\|\ \|: V\to\mathbb{R}\quad \infty)$$
Удовлетвор. следующим свойствам

1) $\|x\|\geqslant 0$, причем $\|x\|=0$ только при $x=0$ (положительная определенность нормы)

2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in V$ (неравенство треугольника)

3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\| \quad \forall x\in V \quad \alpha$ - число (положительная однородность нормы)

Следствие 2. Длина вектора $|x|$ задает норму на V

Док-во проверить св-во 3
$$|\alpha x|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)}=|\alpha||x|$$

$\rho(x,y) = |x-y|$ - метрика на V.

примеры

(к неравенству К-Б)

$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

$(f,g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$ $\quad |\int_a^b f(t) g(t) dt| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$

(к неравенству треугольника)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i \pm y_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

$$\sqrt{\int_a^b |f(t) \pm g(t)|^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \pm \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

§2 Ортогональные векторы. 11.04.18

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Определение. Векторы $x, y \in V$ наз. ортогональными, если $(x,y) = 0$

Обозн. $x \perp y$.

Теорема Пифагора.

Если векторы $x_1 \ldots x_k$ попарно ортогональны, то

$$|\sum_{i=1}^{k} x_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2$$

Док-во

По индукции

$k=2$ $\quad |x_1 + x_2|^2 = (x_1 + x_2; x_1 + x_2) = (x_1, x_1) + (x_2, x_1) + (x_1, x_2) + (x_2, x_2) =$
$= |x_1|^2 + |x_2|^2$

$k \to k+1$ $\quad |x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}|^2 = (x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}; x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}) =$
$= |x_1 + \ldots + x_k|^2 + (x_1 + \ldots + x_k, x_{k+1}) + (x_{k+1}; x_1 + \ldots + x_k) + |x_{k+1}|^2 =$
$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2 + |x_{k+1}|^2$

Угол:

Пусть V - веществ. евклидово пространство $x, y \in V$. По неравенству Коши-Б.

$$-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x||y|} \leqslant 1 \Rightarrow \exists! \varphi \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \text{ для которого}$$

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

φ наз. углом между векторами x и y

Пусть V - комплекс. евклидово пр-во

$$0 \leqslant \frac{|(x,y)|}{|x||y|} \leqslant 1$$

$$\exists! \varphi \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{|(x,y)|}{|x||y|}$$

Процесс ортогонализации Грама - Шмидта.

Пусть $x_1 \dots x_m$ - лин. независимые векторы

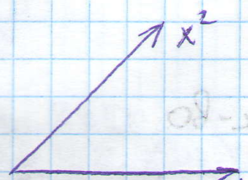
Построим систему векторов $y_1 \dots y_m$ - попарно ортогональных, причем $\langle x_1 \dots x_k \rangle = \langle y_1 \dots y_k \rangle$
$k = 1 \dots m$

$y_1 = x_1$

y_2 ищем в виде $y_2 = x_2 + \alpha y_1$

$$(y_2, y_1) = 0 \Rightarrow (x_2 + \alpha y_1; y_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(x\ , y_1)}{(y_1; y_1)}$$

т.е. $y_2 = x_2 - \dfrac{(x_2\ , y_1)}{(y_1; y_1)} y_1$



$$pr_{x_1} x_2 = \frac{(x_2\ x_1)}{(x_1\ x_1)} x_1$$

Дальше по индукции.

Пусть $y_1 \dots y_{k-1}$ построены

Ищем y_k в виде $y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}$.

Найдем коэф $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$ из условий ортогональности

$$(y_k, y_1) = 0 \dots (y_k; y_{k-1}) = 0$$

$$(x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}; y_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$(x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}; y_{k-1}) = 0$$

т.к. вектора $y_1 \dots y_{k-1}$ попарно ортогон., то

$$(x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{(x_k, y_1)}{(y_1; y_1)}$$

$$\vdots$$

$$(x_k; y_{k-1}) + \alpha_{k-1}(y_{k-1}; y_{k-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{(x_k; y_{k-1})}{(y_{k-1}; y_{k-1})}$$

т.е

$$y_k = x_k - \frac{(x_k; y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \dots - \frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}; y_{k-1})} y_{k-1}$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k; y_i)}{(y_i; y_i)} y_i$$

Теорема.

В n-мерном евклидовом пространстве сущ. базис из n попарно ортогональных векторов. (ортогональный базис)

Любой набор ненулевых попарно ортогональных векторов можно дополнить до ортогонального базиса.

Док-во. 1) В любом n-мерном евклидовом пространстве сущ. базис из n лин. нез. векторов $x_1 \dots x_n$

Применив процесс ортогонализации получим ортогон. базис.

2) Заметим, что любой набор ненулевых попарно ортогон. векторов лин. нез.

Пусть

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ (Умножение скалярно на x_i)

$$\alpha_i (x_i, x_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

Дополним $x_1 \dots x_k$ до базиса, а потом ортогонализуем

Определение Базис, состоящий из попарно ортогональных векторов наз. ортогональным базисом.

Ортогональный базис наз. ортонормированным, если все вектора имеют единичную длину.

Следствие. В каждом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис

Действительно, в каждом евклидовом пр-ве существует ортогональный базис $y_1 \dots y_n$

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

§ 3. Матрица Грама

Пусть $e_1 \dots e_n$ произвольный набор векторов из V.

Определение. Матрица $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$ $i, j = 1 \dots n$.

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1 e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ \vdots & & & \\ (e_n e_1) & \dots & \dots & (e_n e_n) \end{pmatrix}$$ наз. матрицей Грама системы векторов $e_1 \dots e_n$

Если $e_1 \dots e_n$ - базис V, то G наз. матрицей скалярного произведения в базисе $e_1 \dots e_n$

V - вещ. евклидово пр-во

Матрица G симметрична, $G = G^T$, $g_{ij} = g_{ji}$ и положительно определена

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j > 0, \text{ если } x = (x_1 \dots x_n) \neq 0$$

V - комплексное евклидово пр-во

Матрица G эрмитово симметрична, $G = \overline{G}^T$ или $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$ и положительно определена, т.е

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} z_i \overline{z}_j > 0, \text{ если } z = (z_1 \dots z_n) \neq 0.$$

Скалярное произведение

Если $e_1 \dots e_n$ - базис V и $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots y_n e_n$, то

$$(x, y) = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n; y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{ij=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = g_{ij} x_i y_j = X^T G Y.$$

$$(x, y) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

Если V - комп. евклидово пр-во, то

$$(x, y) = \sum_{ij=1}^{n} x_i \overline{y}_j (e_i, e_j) = X^T G \overline{Y}$$

т.е задание базиса $e_1 \dots e_n$ и матрицы G полностью определяет скалярное произведение.

Если базис - ортонормированный, то $G = E$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Связь матриц Грама разных базисов.

Пусть $e_1 \dots e_n$ и $e_1' \dots e_n'$ - 2 базиса, C - матрица перехода от e к e'

$$[e_1' \dots e_n'] = [e_1 \dots e_n]\, C$$

т.е $e_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j$

Тогда $g_{ij}' = (e_i', e_j') = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k ; \sum_{m=1}^{n} c_{mj} e_m\right) = \sum_{k,m=1}^{n} c_{ki} c_{mj} g_{km}$

Это равносильно матричному соотношению

$$G' = C^T G C$$

В комплексном евклидовом пр-ве

$$G' = C^T G \overline{C}$$

<u>Предложение.</u> Определитель матрицы Грама любой системы векторов $\geqslant 0$

Он равен нулю $\Leftrightarrow$ векторы $e_1 \dots e_n$ лин. зависимы

<u>Док-во.</u> Пусть базис $f_1 \dots f_n$ - ОНБ

Тогда $G_f = E$

Пусть e - произвольные векторы, C - матрица перехода от f к e

$$G_e = C^T G_f \underset{(\overline{C})}{C} \Rightarrow \det G_e = (\det C)^2 \geqslant 0.$$

Если векторы $e_1 \dots e_n$ - лин независ $\Rightarrow$ они образуют базис

$$\Rightarrow (\det C)^2 > 0.$$

Если векторы $e_1 \dots e_n$ - лин. зав.

Пусть, например, $e_k = \sum' \lambda_i e_i$

Тогда

$$(e_k, e_j) = \sum \lambda_i (e_i ; e_j) \text{ и}$$

k-строка матрицы G явл. лин комбинацией остальных строк

$$\Rightarrow \det G_e = 0.$$

§4. Изометрический изоморфизм евклидовых пространств одной размерности.

Определение. Два евклидовых пространства V и V' наз изоморфными (одинаково устроенными), если между их элементами можно установить взаимооднозначное соответствие

$$\varphi : V \to V' \qquad \varphi : x \to x',$$

которое является изоморфизмом векторных пространств V и V'

т.е

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

$$\forall x, y \in V \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

и кроме того сохраняет скалярное произведение, т.е

$$(\varphi(x), \varphi(y))' = (x, y)$$

Отображение φ наз. изометрическим изоморфизмом

Теорема.
Любые 2 евклидовых векторных пр-ва одной и той же размерности n изоморфны.

Док-во Покажем, что каждое вещ. евклидово пр-во размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$ (комплексное – $\mathbb{C}^n$)

Пусть V - n-мерное евклидово пр-во

Зафиксируем ОНБ $e_1 \ldots e_n$

Построим $\varphi : x \in V \to \varphi(x) \; (\in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n)$ след. образом

$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

$x_i = (x, e_i)$

$\varphi(x) := (x_1 \ldots x_n)$

Все св-ва выполняются

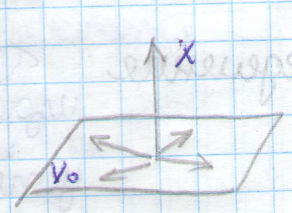
13.04.18

§5. Ортогональное дополнение к подпространству
Ортогональное разложение

Определение $V_0 \subset V$ – подпространство вект. пр-ва V, если $\forall x, y \in V_0 . \quad x+y \in V_0, \; \alpha x \in V_0$

Определение: Вектор x ортогонален подпространству V_0, если он ортогонален каждому вектору из V_0

$$\forall y \in V_0 \quad (x, y) = 0$$



Обозначение: $V_0^{\perp} = \{ x \in V \mid x \perp V_0 \}$

Лемма

Вектор x ортогонален k-мерному подпр-ву V_0 $\Leftrightarrow$ x ортогонален базису V_0.

Док-во Пусть $e_1 \dots e_k$ - произвольный базис V_0

„$\Rightarrow$" $x \perp V_0 \Rightarrow x \perp e_i$; $i=1..k$; т.е $(x, e_i) = 0$.

„$\Leftarrow$" по условию $(x, e_i) = 0$; $i=1..k$

$\forall y \in V_0$ $\quad y = y_1 e_1 + \dots + y_k e_k$

$$(y\, x) = y_1 \underbrace{(e_1, x)}_{0} + \dots + y_k \underbrace{(e_k, x)}_{0} = 0$$

Теорема.

1. $V_0^\perp$ является подпространством V.
2. $V = V_0 \oplus V_0^\perp$ $\qquad (V_0^\perp = \{x \in V \mid x \perp y \quad \forall y \in V_0\})$
3. $(V_0^\perp)^\perp = V_0$.

Док-во. 1. Если $x, y \in V_0^\perp$, то $\forall z \in V_0$ $\quad (x,z) = (y,z) = 0$.

Тогда $\forall z \in V_0$ $\quad (x+y, z) = (x,z) + (y,z) = 0$, т.е $x+y \in V_0^\perp$

$\forall \alpha$ $\quad (\alpha x, z) = \alpha(x,z) = 0$, т.е $\alpha x \in V_0^\perp$

2. Пусть $e_1 \dots e_m$ - ортогональный базис V_0

Дополним его до ортогонального базиса V $\quad e_1 \dots e_m, e_{m+1} \dots e_n$

$\forall j \geq m+1$ вектор e_j ортогонален всем векторам $e_1 \dots e_m$

$\Rightarrow$ по лемме $e_j \in V_0^\perp$

В частности, отсюда следует, что $\dim V_0^\perp \geq n-m$

Заметим, что $V_0 \cap V_0^\perp = \{0\}$

Действительно, если $x \in V_0$ и $x \in V_0^\perp$, то $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Поэтому сумма $V_0 + V_0^\perp$ - прямая $V_0 \oplus V_0^\perp$

$$\dim(V_0 + V_0^\perp) = \underbrace{\dim V_0}_{m} + \dim V_0^\perp \geq m + (n-m) = n \Rightarrow \dim V_0^\perp = n-m$$

и $V_0 \oplus V_0^\perp = V$

Векторы $e_{m+1} \dots e_n$ лин. незав. и лежат в $V_0^\perp$,

$\dim V_0^\perp = n-m \Rightarrow e_{m+1} \dots e_n$ - базис $V_0^\perp$

3. $e_1 \dots e_m$ - ортогональный базис V_0

$e_1 \dots e_m, \underbrace{e_{m+1} \dots e_n}_{\text{базис } V_0^\perp}$ - ортогональный базис V

Вектор $x \in (V_0^\perp)^\perp \Rightarrow x$ - ортогонален $e_{m+1} \dots e_n \Rightarrow x \in V_0$.

Итак, $(V_0^\perp)^\perp = V_0$

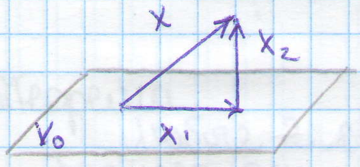
$V = V_0^\perp \oplus (V_0^\perp)^\perp \Rightarrow \dim(V_0^\perp)^\perp = \dim V - \dim V_0^\perp = n-(n-m) = m = \dim V_0$

поэтому $(V_0^\perp)^\perp = V_0$.

$V = V_0 \oplus V_0^\perp$

Таким образом, каждый вектор $x \in V$ единственным образом разлагается в сумму (прямая сумма)

$x = x_1 + x_2$; $x_1 \in V_0$; $x_2 \in V_0^\perp$



Вектор x_1 наз. ортогональной проекцией вектора x на подпр-во V_0

x_2 - ортогон. проекция на $V_0^\perp$

По т. Пифагора

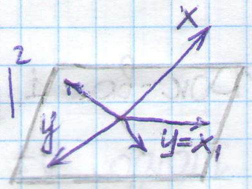
$\forall y \in V_0$

$|x-y|^2 = (x_1 + x_2 - y)^2 = |(x_1 - y) + x_2|^2 = |x_1 - y|^2 + |x_2|^2 \geqslant |x_2|^2$

Причем равенство достигается для $y = x_1$, т.е

x_1 - ближайший вектор в V_0 к x

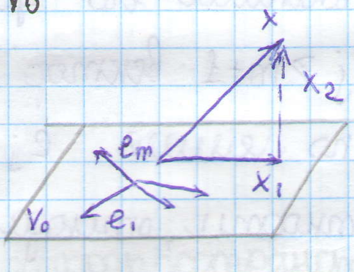
$\rho(x, V_0) = \inf\limits_{y \in V_0} |x-y|^2$



<u>Предложение</u> Расстояние от x до V_0 равно длине ортогональной проекции x на $V_0^\perp$

Нахождение ортогональной проекции x на V_0

Пусть $e_1 \dots e_m$ базис V_0



$x_1 \in V_0 \Rightarrow x_1 = C_1 e_1 + \dots + C_m e_m$

$(x - x_1, e_k) = 0 \quad \forall k = 1 \dots m$

т.е $(x_1, e_k) = (x, e_k)$

Получаем систему уравнений

$C_1(e_1, e_k) + C_2(e_2, e_k) + \dots + C_m(e_m, e_k) = (x_1, e_k)$; $k = 1 \dots m$

$$\begin{cases} C_1(e_1, e_1) + \dots + C_m(e_m; e_1) = (x, e_1) \\ \vdots \\ C_1(e_1, e_m) + \dots + C_m(e_m, e_m) = (x, e_m) \end{cases}$$

Определитель этой системы - это определитель матрицы Грама

$\det G_e \neq 0$ $e_1 \dots e_m$ базис $\Rightarrow \exists!$ решение $C_1 \dots C_m$

Если базис $e_1 \dots e_m$ - ортонормированный, то $C_k = (x, e_k)$

C_k - коэф. Фурье

проекция x на V_0

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} (x_i e_i) e_i \quad ; \quad x - x_1 \in V_0^{\perp}$$

$$\rho(x, V_0) = \left| x - \sum_{i=1}^{m} (x_i\, e_i) e_i \right|$$

Так как $x = x_1 + x_2$:

$$|x|^2 = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) = |x_1|^2 + |x_2^2| \geq |x_1|^2, \text{ то}$$

$$|x_1|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i e_i)^2 \leq |x|^2$$

т. Пифагора

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i e_i)^2 \leq |x|^2 \text{ - нер-во Бесселя.}$$

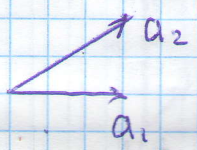
§6. Объем в евклидовом пространстве.

n-мерные фигуры.

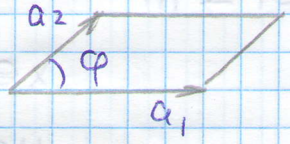
<u>Единичный куб</u> - мн-во $\{t_1 e_1 + \ldots t_n e_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$
$e_1 \ldots e_n$ - ОНБ

<u>Параллелепипед</u> со сторонами $\{a_1 \ldots a_n\}$ - мн-во
$\{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$.

$n = 2$



$$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{pmatrix}$$



$$\det G = |a_1|^2 |a_2|^2 - |a_1|^2 \cdot |a_2|^2 \cdot \cos^2\varphi = |a_1|^2 |a_2|^2 \sin^2\varphi$$

$\det G$ = квадрату площади параллелограмма построенного на векторах a_1, a_2

$n = 3$

$$G = \begin{pmatrix} (a_1\, a_1), & (a_1 a_2) & (a_1, a_3) \\ (a_2, a_1) & (a_2\, a_2) & (a_2, a_3) \\ (a_3, a_1) & (a_3, a_2) & (a_3, a_3) \end{pmatrix}$$

Можно показать, что

$$\det G = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{vmatrix}^2$$

- квадрату объема параллелепипеда построенного на векторах $a_1\ a_2\ a_3$

Основанием параллелепипеда $\Pi(a_1 \ldots a_m)$ наз. параллелепипед натянутый на любые $m-1$ векторов из $a_1 \ldots a_m$
например, $\Pi(a_1 \ldots a_{m-1})$

Рассмотрим подпр-во $V_1 = \langle a_1 \dots a_{m-1} \rangle$, $V = \langle a_1 \dots a_m \rangle$

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

Возьмем вектор a_m однозначно представляется в виде

$a_m = x + y$; $x \in V_1$, $y \in V_1^{\perp}$

Вектор y наз. высотой параллелепипеда $\Pi(a_1 \dots a_m)$, опущенной на основание $\Pi(a_1 \dots a_{m-1})$

Объем параллелепипеда $\Pi(a_1 \dots a_m)$ (неориентированный объем) $V(a_1 \dots a_m)$

Определим по индукции

$m=1$ $\quad V(a_1) = |a_1|$

$m-1 \to m$ $\quad V(a_1 \dots a_m) = V(a_1 \dots a_{m-1}) \cdot |y|$

($|y|$ - длина высоты опущенной на основание $\Pi(a_1 \dots a_{m-1})$)

<u>Утверждение</u>: $V^2(a_1 \dots a_m) = \det G(a_1 \dots a_m)$

<u>Док-во</u> по индукции

$m=1$ очевидно

$m-1 \to m$ $\qquad a_m = x + y$

$x \in V_1 = \langle a_1 \dots a_{m-1} \rangle$

$y \in V_1^{\perp}$ $\qquad a_m = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-1} a_{m-1} + y$

$$\det G_{(a_1 \dots a_m)} = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_m) \\ & & \\ (a_m, a_1) & & (a_m, a_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & 0 \\ & \vdots & & 0 \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \dots & (y, a_m) \end{vmatrix}$$

Вычтем из последнего столбца все предыдущие умнож на $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$

$(a_1, a_m) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2) + \dots + \alpha_{m-1} (a_1, a_{m-1})$

$(y, a_m) = (y, y) = |y|^2$, т.к. $y \in V_1^{\perp}$

Разлагая определитель по последнему столбцу, имеем

$$\det G(a_1 \dots a_m) = \det G(a_1 \dots a_{m-1}) |y|^2 = V^2(a_1 \dots a_{m-1}) |y|^2 = V^2(a_1 \dots a_m)$$

предпол. ин.

Ориентированный объем.

Пусть векторы $a_1, \dots a_m$ - лин. независимы

$V = \langle a_1, \dots a_m \rangle$

и пусть $e_1 \dots e_m$ - ОНБ V.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = G = \begin{pmatrix} (a_1 a_1) & \dots & (a_1 a_m) \\ \\ (a_m a_1) & \dots & (a_m a_m) \end{pmatrix}$$

координаты a_1

$$\det A^T A = \det G$$

$$\overset{\shortparallel}{(\det A)^2} \Rightarrow \det A = \pm V(a_1 \dots a_m)$$

Определитель матрицы A наз. ориентированным объемом m-мерного параллелепипеда $\Pi(a_1 \dots a_m)$

Обозначение $v(a_1 \dots a_m)$

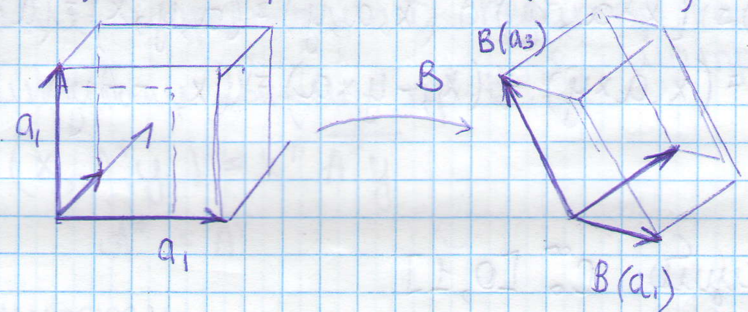
$$V(a_1 \dots a_m) = |v(a_1 \dots a_m)|$$

Теорема

Пусть $B: V \to V$ - линейное преобразование евклидова пр-ва V размерности n

Тогда для любых векторов $a_1 \dots a_n \in V$

$$v(B(a_1) \dots B(a_n)) = \det B \cdot v(a_1 \dots a_n)$$



искажение объемов при линейном отображении

Док-во. Пусть $e_1 \dots e_n$ - ОНБ V

B-матрица лин. отображения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ координаты векторов $a_1 \dots a_n$

$A' = (B(a_1) \dots B(a_n))$ - координаты векторов $B(a_1) \dots B(a_n)$

$$\begin{cases} B(a_1) = B \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\ \\ B(a_n) = B \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

т.е $A' = B \cdot A \Rightarrow \det A' = \det B \cdot \det B$

$$\underset{\displaystyle v(B(a_1)\ldots B(a_n))}{\det A'} \qquad \underset{\displaystyle v(a_1\ldots a_n)}{\det B}$$

Глава 6. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

§1. Сопряженный оператор.

Пусть V - евклидово пространство (вещ или комплекс)

$A: V \to V$ - линейный оператор.

Определение Отображение $A^*: V \to V$ наз сопряженным к A, если

$$\forall x, y \in V \qquad (Ax, y) = (x, A^* y)$$

примеры 1). $Ax = x \times a$, $a \in \mathbb{R}^3$

$$\forall y \in \mathbb{R}^3 \qquad (Ax, y) = (x \times a, y) = (x, a, y) = (a, y, x) = (a \times y, x) =$$
$$= (x, a \times y) = (x, -y \times a) = (x, -Ay)$$

т.е $A^* = -A$.

2) пр-во функций $C_0^\infty [0,1]$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty$ - бесконечно гладкая, зануляется на гран.

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

$$A = \frac{d}{dt} \longrightarrow (Af, g) = (f', g) = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) g'(t)\, dt = -(f, g')$$

т.е $A^* = -\frac{d}{dt}$.

Лемма

сопряженный оператор линеен

Док-во Пусть $y_1, y_2 \in V$

$$(Ax, y_1 + y_2) \underset{\text{по опред}}{=} (x, A^*(y_1 + y_2))$$